Dossier n°76 : Exemples d'utilisation de l'étude de la variation des fonctions pour des problèmes d'optimisation en géométrie (longueurs, aires, volumes).

Rédigé par Cécile COURTOIS, le 16 juin 2004
cecile-courtois@wanadoo.fr

I Situation par rapport aux programmes.

L'étude des variations des fonctions commence en classe de Seconde avec notamment l'introduction de l'outil : « tableau de variations » et la recherche d'extremums.

Dans les classes de Premières S et Es, on introduit la notion de dérivation et en particulier le lien entre le signe de la dérivée et le sens de variation d'une fonction sur un intervalle.

Je choisis donc de situer ce dossier en Première car la dérivation permet d'étudier les variations d'une fonction et par suite les problèmes d'optimisation.

II Commentaires généraux.

II.1 A propos du sujet.

L'objectif de ce dossier est d'utiliser l'outil numérique que constitue les fonctions pour résoudre des problèmes d'optimisation en géométrie.

Ce genre de sujet permet notamment d'établir un lien entre les connaissances analytiques et les outils géométriques.

Plus précisément, on cherche à résoudre un problème d'optimisation (ici, concernant des longueurs, des aires ou des volumes).

Par modélisation du problème (ie une mise en équation), on arrive à une fonction d'une variable réelle définie sur un intervalle.

Après l'étude de la fonction, on aboutit à la recherche d'extremums et la résolution du problème.

II.2 A propos des exercices.

J'ai choisi de vous présenter trois exercices qui diffèrent d'une part par la nature géométrique du problème et d'autre part par les résultats trouvés :

- l'exercice n°1 propose l'optimisation d'un volume et possède une solution ;
- l'exercice n°2 propose l'optimisation d'une distance et possède deux solutions ;
- l'exercice n°3 propose l'optimisation d'une distance et ne possède pas nécessairement de solution.

En particulier, pour l'étude des variations de certaines fonctions, nous aurons besoin du théorème suivant :

Théorème 1 :

Soit f une fonction dérivable sur I de fonction dérivée f'.

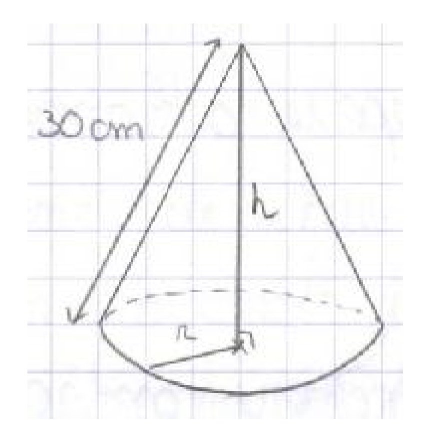
- Si f' est (strictement) positive sur I alors f est (strictement) croissante sur I.
- Si f' est (strictement) négative sur I alors f est (strictement) décroissante sur I.
- Si f' est nulle sur I alors f est constante sur I.

La réciproque de ce théorème est vraie mais ne nous est pas utile ici.

III Présentation des exercices.

III.1 Exercice n°1.

But : Trouver des cônes de révolution dont la longueur de génératrice est 30 cm et qui sont de volume maximal.



Méthode : Exprimer le volume V d'un cône de révolution dont la longueur de génératrice est 30cm en fonction de h.

Outils :

- Théorème de Pythagore ;
- Dérivation ;
- Théorème 1 ;
- Volume d'un cône de révolution.

Remarque :

Le choix de h comme variable de V permet d'aboutir à une fonction facilement dérivable en Première.

III.2 Exercice n°2.

But : trouver les points M de la parabole $\mathcal{P}$: $y = 1 - x^2$ tels que la distance AM soit minimale avec A(0 ; -2).

Méthode : Exprimer AM en fonction de l'abscisse de M. On trouve une fonction de la forme $x \to \sqrt{P(x)}$ où P(x) est un polynôme de degré strictement supérieur à 1. On étudie P(x).

Outils :

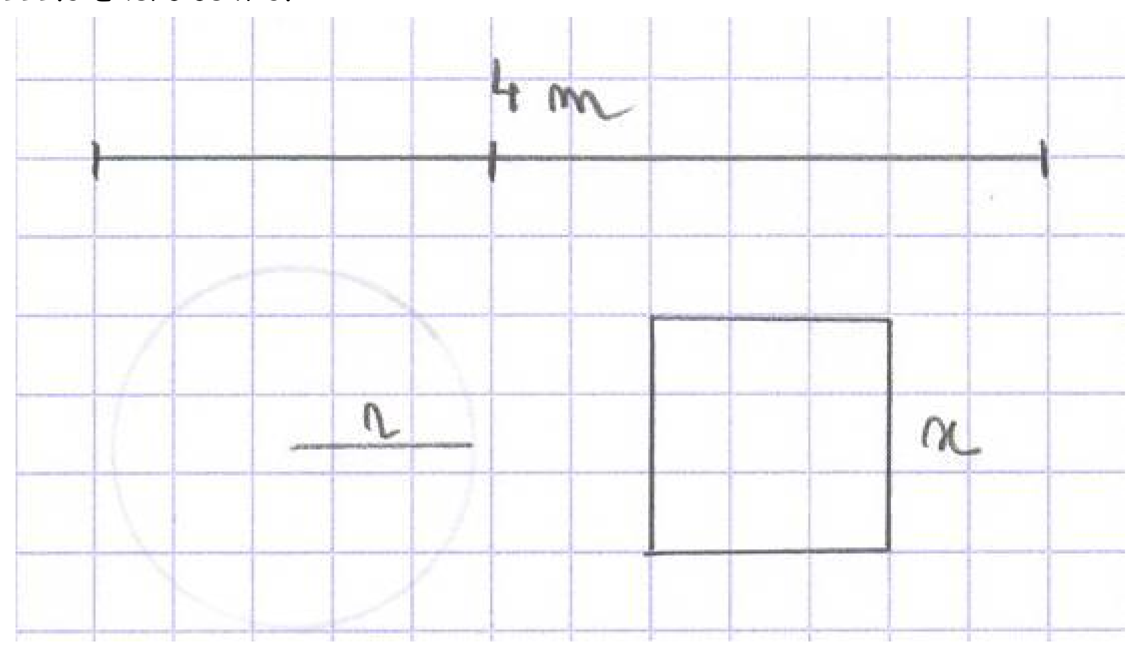
- Distances dans un repère orthonormal ;
- Dérivation ;
- Théorème 1 ;
- La dérivation des fonctions composées n'étant pas connue en Première (sauf $x \to u(ax+b)$), on utilisera le théorème suivant :

Théorème 2 :

Soient f et g deux fonctions. Si f et g sont monotones alors $g \circ f$ est monotone. Plus précisément :

- Si f et g sont monotones de même monotonie, $g \circ f$ est croissante.
- Si f et g sont monotones de monotonie contraire alors $g \circ f$ est décroissante.

III.3 Exercice n°3.



On note a(x) la somme des aires du disque et du carré avec x côté du carré en centimètres.

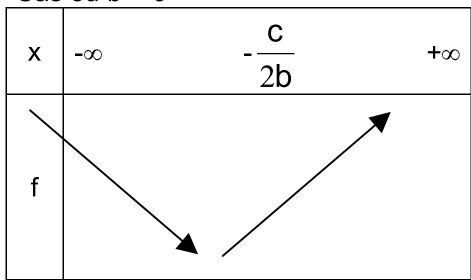
But : Déterminer s'il est possible de couper la ficelle en un point de sorte que l'aire soit minimale (resp. maximale).

Objectif : Présenter un cas de problème d'optimisation ne possédant pas de solutions et où il n'est pas nécessaire d'utiliser la dérivation.

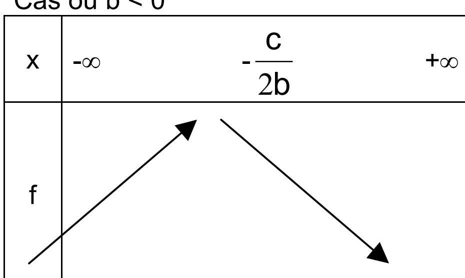
Outils :

- Aire d'un disque ;
- Aire d'un carré ;
- Variations d'un trinôme $f : x \to bx^2 + cx + d$ (b non nul) :

Cas où $b > 0$



Cas où $b < 0$



IV Enoncés et références des exercices.

IV.1 Exercice n°1 (n°41 p 106, Transmath 1ère S 2001, modifié).

On rappelle que la longueur de la génératrice d'un cône de révolution est la distance du sommet du cône à un point quelconque du cercle de base.

Le but de cet exercice est de trouver les cônes de révolution dont la longueur de la génératrice est 30 cm et qui sont de volume maximal.

Pour cela, on considère un cône de révolution de hauteur h, de rayon de base r et de longueur de génératrice 30 (les données sont en centimètres).

1. Justifier que $r^2 + h^2 = 900$.
2. Vérifier que le volume V du cône, en fonction de h est $V(h) = \frac{\pi}{3}(900h - h^3)$ avec $h \in [0 ; 30]$
3. Etudier les variations de V et répondre au problème posé, en caractérisant, s'ils existent, les cônes de révolution dont la longueur de la génératrice est 30 cm et qui sont de volume maximal.

IV.2 Exercice n°2 (n°42 p 106, Transmath 1ère S 2001)

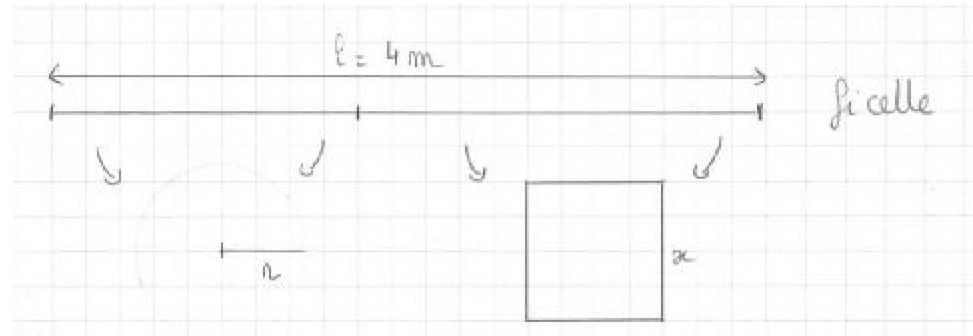
Dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = 1 - x^2$ et A le point de coordonnées (0 ; -2).

Le but de cet exercice est de déterminer les points M de $\mathcal{P}$ les plus proches de A c'est à dire ceux pour lesquels la distance AM est minimale.

1. Soit M un point de $\mathcal{P}$. Soit x son abscisse. Exprimer AM en fonction de x.
2. On pose $P(x) = x^4 - 5x^2 + 9$. trouver le minimum de P sur IR et les réels en lesquels il est atteint.
3. Supposons que P admette un minimum P(a) en a sur IR. Prouver que pour tout $x \in$ IR, $\sqrt{P(a)} < \sqrt{P(x)}$.
4. Répondre au problème posé.

IV.3 Exercice n°3 (n°59 p 117, Terracher 1ère S 2001, modifié).

Une ficelle de longueur l=4m est coupée en deux morceaux. Avec l'un, on forme un cercle et avec l'autre un carré :



On note x le côté du carré obtenu (en centimètres).

1. Exprimer en fonction de x la somme a(x) des aires obtenues pour $0 \leq x \leq 100$.
2. Est-il possible de couper la ficelle en un point de sorte que a(x) soit minimale ?
3. La fonction $x \rightarrow a(x)$ admet-elle un maximum sur]0 ; 100[? sur [0 ; 100] ?
4. Est-il possible de couper la ficelle en un point de sorte que a(x) soit maximale ?

V Commentaires.

Avec l'expérience que j'ai de la classe de Seconde suite à mon année de stage, il est peut-être possible de trouver un exercice pour ce dossier dans les manuels de Seconde

Il faut toutefois bien s'assurer que la résolution du problème utilise effectivement l'étude des variations des fonctions et non pas la simple recherche d'un minimum en utilisant des inégalités.